Povezanost grafov

Rok Požar

15. februar 2007

1 Osnovne definicije in lastnosti

Grafu G rečemo, da je *povezan*, če za vsak par točk u, v obstaja pot od točke u do točke v. Točko v grafa G imenujemo *prerezna točka*, če ima graf $G - v$ več komponent kot G. Podobno imenujemo povezavo e grafa G *prerezna povezava* ali *most*, če z odstranitvijo te povezave dobimo graf z več komponentani kot jih je imel prvotni graf G. *Prerezna množica povezav* je množica $F \subseteq E(G)$, tako da ima graf $G - F$ več komponent kot G. *Prerezna množica točk* je množica $S \subseteq V(G)$, tako da ima graf $G - S$ več komponent kot G.

Graf G imenujemo *k-povezan* (za $k \in \mathbf{N}$), če

- G ima vsaj $k + 1$ točk, ter
- za vsako množico točk $K \subseteq V(G)$ moči $|K| < k$ je graf $G - K$ povezan.

Z drugimi besedami to pomeni, da nobeni dve točki grafa G ne moremo ločiti z manj kot k drugimi točkami. Vsak graf je 0-povezan in 1-povezani grafi so natanko netrivialno povezani grafi. Največje število k, za katero je graf k-povezan, imenujemo *povezanost grafa* in označimo $\kappa(G)$. Velja: $\kappa(G) = 0$ natanko tedaj, ko je G nepovezan. Kot zgleda omenimo grafa K_n in $K_{n,m}$. Povezanost grafa $\kappa(K_n) = n - 1$, povezanost grafa $\kappa(K_{n,m}) = \min\{n, m\}$.

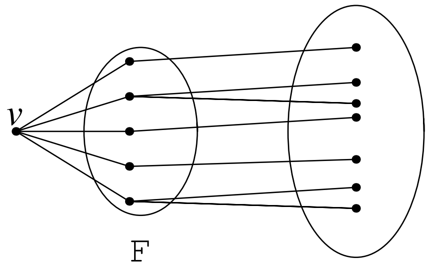
V zgornjem odstavku smo definirali k-povezanost grafa G po točkah. Podobno lahko definiramo za povezave. Če je $|E(G)| > 1$ in je graf $G - F$ povezan za vsako množico $F \subseteq E(G)$, ki ima manj kot l povezav, potem grafu G rečemo, da je po *povezavah l-povezan*. *Povezanost po povezavah* $\lambda(G)$ grafa G je najmanjše število povezav, brez katerih postane graf G nepovezan (oziroma maksimalen k, da je graf G po povezavah k-povezan).

Lema 1.1 *Naj bo G k-povezan graf in označimo z G' graf, ki ga konstruiramo iz grafa G tako, da mu dodamo eno točko y z vsaj k sosedi v G. Potem je graf G' k-povezan.*

Dokaz: Dokažimo, da mora prerezna množica točk S grafa G' imeti moč vsaj k. Če je $y \in S$, potem množica $S \setminus \{y\}$ razbije graf G. To pa ni možno, ker je graf G k-povezan. Če $y \notin S$ in $N(y) \subseteq S$ (vsi sosedi točke y so vsebovani v množici S), potem je $|S| \geq k$, saj je sosedov po predpostavki vsaj k. Drugače pa točka y in točke $N(y) \setminus S$ ležijo v eni komponenti grafa $G' - S$, ki ni povezan. Torej mora množica S ločiti graf G in $|S| \geq k$. ∎

Trditev 1.2 *Za vsak povezan graf G velja*

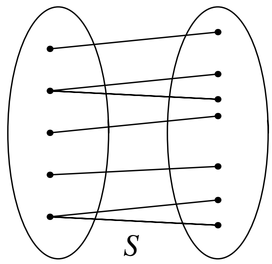
$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$



Slika 1: Incidenčna množica

Dokaz: Naj ima točka v stopnjo $\delta(G)$. Potem naj bo F množica vseh incidenčnih povezav točke v (glej Sliko 1). Graf $G - F$ je nepovezan. Torej velja $\lambda(G) \leq \delta(G)$. Ostane nam pokazati še $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

Naj bo S prerezna množica povezav moči $\lambda(G)$ (glej Sliko 2). Če torej odstranimo te povezave, postane graf $G - S$ nepovezan. Ampak te povezave lahko odstranimo tudi tako, da odstranimo po eno krajišče vsake od teh povezav. Pri odstranitvi točk pazimo, da ne odstranimo vseh točk bodisi v levi množici, bodisi v desni množici. Takšnih točk je največ $\lambda(G)$, zato velja $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

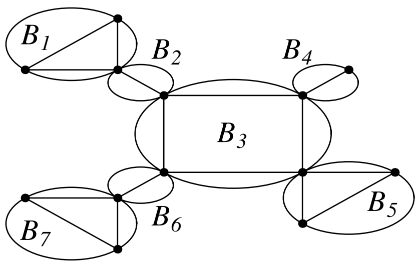


Slika 2: Prerezna množica

■

2 Bloki in 2-povezani grafi

Blok grafa G je maksimalen povezan podgraf brez prereznih točk. Če je že graf G povezan in nima prereznih točk, potem je sam graf G blok. Na Sliki 3 so z $B_1, \ldots, B_7$ označeni posamezni bloki grafa.

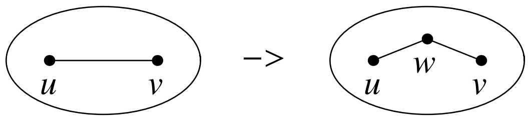


Slika 3: Bloki grafa

Bloki so po povezavah disjunktni, lahko pa imajo skupne točke. Te so natanko prerezne točke. Če je neka povezava vsebovana v ciklu, potem ta povezava sama zase ne more biti blok, saj je v večjem podgrafu, ki nima prereznih točk. Torej je povezava blok natanko tedaj, ko je prerezna povezava; bloki v drevesu so natanko njegove povezave.

Povezan graf brez prereznih točk ni nujno 2-povezan, ker je lahko K_1 ali K_2. Če pa ima blok več kot dve točki, potem je 2-povezan. Torej je vsak blok grafa $G \neq K_1, K_2$ ali maksimalen 2-povezan podgraf, ali most (s krajiščema).

V grafu G je *subdivizija* povezave uv operacija, ki zamenja povezavo uv s potjo uwv skozi novo vozlišče w. Glej Sliko 4.



Slika 4: Subdivizija povezave uv

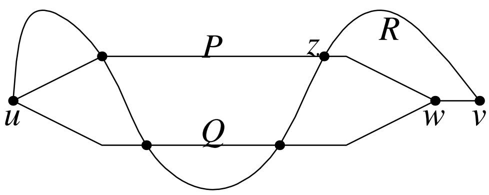
Trditev 2.1 *Graf G, ki ima vsaj tri točke je 2-povezan natanko tedaj, ko za vsak par točk $u, v \in V(G)$ obstajata dve notranji disjunktni (po točkah) poti od točke u do točke v.*

Dokaz: (Zadostnost) Če ima graf G dve notranji disjunktni poti od točke u do točke v, potem z odstranitvijo poljubne točke ne moremo ločiti točk u in v. Ker ta pogoj velja za vsak par točk u, v, potem odstranitev poljubne točke ne more ločiti nobenih dveh točk v grafu G, t.j. graf ostane povezan. Od tod sledi 2-povezanost.

(Potrebnost) Naj bo graf G 2-povezan. Z indukcijo po razdalji $d(u, v)$ med točkama u in v pokažemo, da ima graf G dve notranji disjunktni poti od točke u do točke v.

Baza indukcije. Če je $d(u, v) = 1$, potem je graf $G - uv$ povezan, saj je $2 \leq \kappa(G) \leq \lambda(G)$. Torej obstaja pot P od točke u do točke v v grafu $G - uv$. Iskani poti sta torej P in pot Q, zgrajena le iz povezave uv. Poti P in Q sta očitno notranje disjunktni.

Indukcijski korak. Naj bo $k = d(u, v)$ ter naj bo w točka takoj pred točko v na najkrajši poti od točke u do točke v. Torej je $d(u, w) = k-1$ in $d(w, v) = 1$. Po indukcijski predpostavki ima graf G dve notranji disjunktni poti P, Q od točke u do točke w. Če je $v \in V(P) \cup V(Q)$, potem sta naši iskani notranje disjunktni poti v ciklu $P \cup Q$ kar poti P in Q.



Slika 5: Pot R od točke u do točke v

Poglejmo še primer $v \notin V(P) \cup V(Q)$ (glej Sliko 5). Ker je graf G 2-povezan, ostane graf $G - w$ povezan in zato vsebuje pot R od točke u do točke v. Če je pot R disjunktna s potjo P ali Q, smo iskani poti že našli. Toda pot R lahko večkrat seka poti P in Q. Naj bo z zadnja točka na poti R (pred točko v), ki pripada $P \cup Q$. Zaradi simetrije lahko privzamemo, da je točka $z \in P$. Sedaj zgradimo pot P' od točke u do točke v, ki je disjunktna s potjo $Q \cup wv$, tako da združimo del poti P od točke u do točke z z delom poti R od točke z do točke v. Tedaj sta P' in Q iskani poti. ■

Trditev 2.2 (Opis 2-povezanih grafov) *Za graf G na vsaj treh točkah so naslednje trditve ekvivalentne.*

(a) Graf G je 2-povezan.

(b) Graf G ima samo en blok.

(c) Vsak par točk x, y grafa G leži na skupnem ciklu.

(d) Med vsakim parom točk x, y grafa G obstaja par notranje disjunktnih poti.

(e) $\delta(G) \geq 1$ in vsak par povezav grafa G leži na skupnem ciklu.

Dokaz: Ekvivalenca med (a) in (d) sledi iz Trditve 2.1.

Za $(a) \Rightarrow (b)$, graf G je 2-povezan, torej je povezan in nima prereznih točk. Torej je graf G blok. Za $(a) \Leftarrow (b)$, graf G ima vsaj tri točke in en sam blok, torej je 2-povezan.

Za $(d) \Leftrightarrow (c)$, opazimo, da cikel, ki vsebuje točki x in y, hkrati vsebuje dve notranji disjunktni poti od točke x do točke y. Velja tudi obrat.

Za $(e) \Rightarrow (c)$, iz pogoja $\delta(G) \geq 1$ sledi, da točki x in y nista izolirani. Torej obstajata povezavi $e, f \in E(G)$, da je x krajišče povezave e in y krajišče povezave f. Če je $e \neq f$, potem po predpostavki obstaja cikel C v grafu G in cikel vsebuje točki x ter y. Cikel C očitno vsebuje točki x in y. Če $e = f$, za C lahko vzamemo cikel, ki vsebuje povezavo e in neko drugo povezavo w, ki leži v grafu G.

Za končanje dokaza privzemimo, da graf G zadošča ekvivalentnima lastnostima (a) ter (c), in od tod pokažimo veljavnost lastnosti (e). Ker je graf G 2-povezan, torej tudi povezan, velja $\delta(G) \geq 1$. Izberimo sedaj dve povezavi uv in xy. Dodajmo grafu G točko w s sosedoma $\{u, v\}$ in točko z s sosedoma $\{x, y\}$. Označimo novi graf z G'. Ker je graf 2-povezan, po Lemi 1.1 sledi, da je G' 2-povezan.

Torej lahko na grafu G' uporabimo lastnost (c). Potem točki w in z ležita na ciklu C v grafu G'. Ker imata obe točki w in z stopnjo dve, mora cikel C vsebovati poti u, w, v in x, z, y, ne more pa vsebovati povezave uv in povezave xy. Če zamenjamo poti uwv in xzy v ciklu C s povezavama uv in xy, dobimo cikel skozi povezavi uv in xy v grafu G. ■

Trditev 2.3 *Označimo z G' graf, ki nastane s subdivizijo ene od povezav grafa G. Če je graf G 2-povezan, potem je tudi graf G' 2-povezan.*

Dokaz: Naj bo graf G' porojen iz grafa G, tako da v grafu G subdiviziramo povezavo uv z novim vozliščem w. Za dokaz 2-povezanosti grafa G' zadostuje pokazati, da za vsaki povezavi e, f grafa G' obstaja cikel, ki vsebuje povezavi e, f.

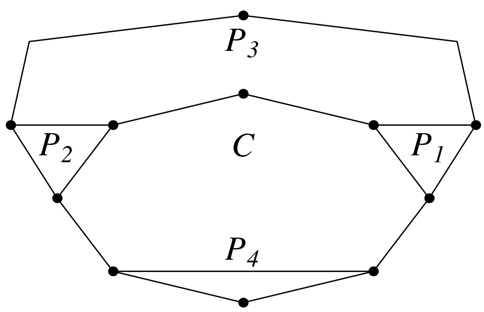
Ker je graf G 2-povezan, vsaki dve povezavi grafa G ležita na nekem ciklu. Če povezavi e, f grafa G' ležita v grafu G, potem cikel skozi njiju v grafu G leži tudi v grafu G', razen če vsebuje povezavo uv. V tem primeru preoblikujemo cikel, tako da zamenjamo povezavo uv s potjo uwv v grafu G'.

Če povezava $e \in E(G)$ in povezava $f \in \{uw, wv\}$, preoblikujemo cikel, tako da gre skozi povezavo e in povezavo uv v grafu G. Če je $\{e, f\} = \{uw, wv\}$, preoblikujemo cikel, tako da gre skozi povezavo uv. ■

Izrek 2.4 (Ušesna dekompozicija) *Graf G je 2-povezan natanko tedaj, ko ga lahko zapišemo v obliki*

$$G = C \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_k,$$

kjer je C cikel dolžine tri ali več, $P_1, P_2, \ldots, P_k$ pa so poti, pri čemer pot P_i $(1 \leq i \leq k)$ povezuje različni točki grafa $G_{i-1} = C \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_{i-1}$ in sta to edini točki na poti P_i, ki ležita v grafu G_i. Glej Sliko 6.



Slika 6: Ušešna dekompozicija

Dokaz: (Zadostnost) Ker so cikli 2-povezani, zadostuje pokazati, da dodajanje poti P_i ohranja 2-povezanost. Naj bosta u, v končni točki poti P_i, ki jo dodamo 2-povezanemu grafu G. Če dodamo povezavo, ta ne more pokvariti povezanosti. Lahko dobimo tudi vzporedno povezavo. Toda povezanost se ne spremeni. Graf $G + uv$ je zato 2-povezan. Z zaporedje subdivizij povezav preoblikujemo graf $G + uv$ v graf $G \cup P_i$, v katerem je P_i pot. Po Trditvi 2.3 vsaka subdivizija ohranja 2-povezanost.

(Potrebnost) Naj bo graf G 2-povezan. Iz Trditve 2.2 vemo, da graf G vsebuje vsaj en cikel. Naj bo torej C poljuben cikel v grafu G. Recimo, da smo sestavili podgraf $G_{i-1} = C \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_{i-1}$. Če to ni cel graf G, dobimo novo pot P_i in graf $G_i = G_{i-1} \cup P_i$ takole: Naj bo e poljubna povezava iz $E(G) \setminus E(G_{i-1})$ in f poljubna povezava iz G_{i-1}. Tedaj obstaja cikel, ki ju vsebuje in ta cikel vsebuje tudi primerno pot P_i. ∎

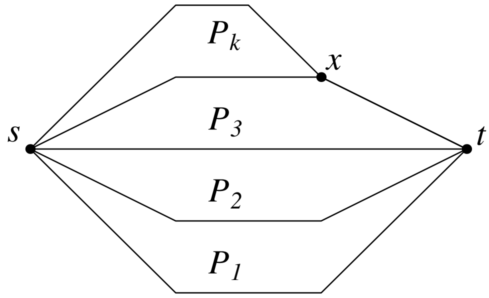
3 Mengerjev izrek

Izrek 3.1 (Mengerjev Izrek za točke) *Naj bosta s in t nesosednji točki grafa G in $k \in \mathbf{N}$. Tedaj graf G vsebuje k paroma notranje disjunktnih poti med točko s in t natanko tedaj, ko za vsako množico točk $S \subseteq V(G) \setminus \{s,t\}$ moči $|S| \leq k-1$, graf $G - S$ vsebuje pot od točke s do točke t.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Recimo, da obstaja množica točk $S \subseteq V(G) \setminus \{s,t\}$ moči $|S| \leq k-1$, ki loči točki s in t. Tedaj gotovo nimamo k notranje disjunktnih poti med točko s in t, saj vsaka taka pot vsebuje vsaj eno točko iz S.

($\Leftarrow$) Dokazujemo z indukcijo po k. Za $k = 1$ je izrek očiten.

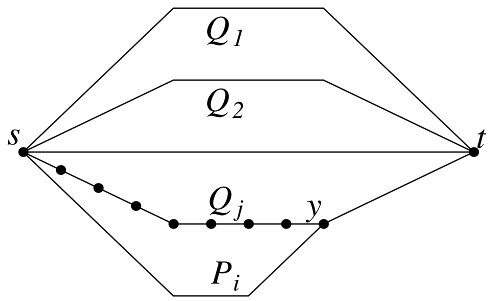
Zdaj naj bo $k > 1$. Po indukcijski predpostavki obstaja $k-1$ paroma disjunktni poti $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$ od točke s do t. Sosedje točke s, ki ležijo na teh poteh, ne ločijo točk s in t, saj je moč množice vseh sosednjih točk $k-1$ in po predpostavki obstaja pot P od točke s do t v grafu $G - S$. Začetna povezava poti P očitno ni na nobeni od poti $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$. Naj bo x prva točka na P, ki je različna od točke s in leži na $P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_{k-1}$. Takšna točka obstaja, saj se pot P konča v točki t, ki pa je vsebovana v poti P_1. Označimo s P_k začetni del poti P od točke s do točke x. Predpostavimo, da so poti $P_1, P_2, \ldots, P_k$ izbrane tako, da je razdalja od točke x do točke t v grafu $G - s$ minimalna. Glej Sliko 7.



Slika 7: Minimalni sistem poti

Če je $x = t$, smo k poti že našli. Sicer v grafu $G - x$ poiščemo $k - 1$ notranje disjunktnih poti $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k-1}$ od točke s do točke t. Te poti izberemo tako, da vsebujejo čim manj povezav, ki niso v $P_1, P_2, \ldots, P_k$.

Poglejmo sedaj pot P_i $(1 \leq i \leq k)$, katere začetna povezava ni na poteh Q_j $(1 \leq j \leq k-1)$. Naj bo $y \neq s$ prva točka na poti P_i, ki pripada $Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_{k-1} \cup \{x\}$. Če je $y = t$, tedaj so $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k-1}, P_i$ iskane poti. Če je $y = x$, naj bo R najdaljša pot od točke x do točke t v grafu $G - s$. Nadaljujmo s potjo P_i od točke $y = x$ po poti R do prve točke a, ki je na $Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_{k-1}$. Označimo novo dobljeno pot od točke s do točke a s P_a. Tako dobimo nov sistem poti $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k-1}, P_a$, ki pa je v protislovju z minimalnostjo poti $P_1, P_2, \ldots, P_k$ (razdalja od točke a do točke t je manjša kot razdalja točke x do točke t).



Slika 8: Točka y leži na poti Q_j

Ostane nam še možnost, ko $y \notin \{t, x\}$ leži na eni od poti Q_j $(1 \leq j \leq k-1)$ (glej Sliko 8). Potem odsek poti Q_j od točke s do točke y vsebuje vsaj eno povezavo, ki ni na $P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_{k-1}$. To je res, saj bi se sicer dve poti izmed $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sekali v točki $y \notin \{t, x, s\}$, kar bi bilo v protislovju s predpostavkami. Ampak ta odsek lahko zamenjamo z ustreznim odsekom P_i in dobimo nov sistem poti $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_{k-1}$, ki vsebuje manj povezav iz $E(G) \setminus E(P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_k)$. To pa je v protislovju z našo izbiro poti $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k-1}$. ■

Izrek, ki smo ga pravkar dokazali, je Mengerjev izrek za točke. Omenimo še Mengerjev izrek za povezave:

Izrek 3.2 (Mengerjev Izrek za povezave) *Povezan graf G je po povezavah k-povezan natanko tedaj, ko je med poljubnim parom točk vsaj k po povezavah disjunktnih poti.*

Literatura

[1] R. Diestel: *Graph Theory*, Springer-Verlang New York, 2000.

[2] R. J. Wilson, J. J. Watkins: *Uvod v teorijo grafov*, DMFA, 1997.

[3] M. Juvan, P. Potočnik: *Teorija grafov in kombinatorika*, DMFA, 2000.

[4] D. Bajc, T. Pisanski: *Najnujnejše o grafih*, DMFA, 1985.

[5] D. B. West: *Introduction to Graph Theory*, Second Edition, Prentice Hall, 2001.